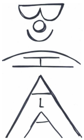
Metoda hraničních prvků a ...

Jiří Bouchala



Katedra
aplikované
matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
VŠB - Technická univerzita Ostrava

21. 6. 2016, PANM 18, Janov nad Nisou

Věta o třech potenciálech.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí a $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Pak pro každé $x \in \Omega$ platí

$$u(x) = -\int_\Omega \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \Delta u(y) \, \mathrm{d}y +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \, \mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \right) u(y) \, \mathrm{d}s_y .$$

$v(x,y) := \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{\|x-y\|}$ ... fundamentální řešení Laplaceova operátoru v $\mathbb{R}^3$

Uvažujme Dirichletovu - Neumannovu úlohu

$$
\text{(DN)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{v} \ \ \Omega, \\ u = g_1 & \text{na} \ \ \Gamma_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = g_2 & \text{na} \ \ \Gamma_2, \end{cases}
$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $g_1 \in C(\Gamma_1)$, $g_2 \in C(\Gamma_2)$, $f \in C(\overline{\Omega})$. Z věty o třech potenciálech vyplývá:
je-li $u \in C^2(\overline{\Omega})$ klasickým řešením úlohy (DN), platí pro každé $x \in \Omega$

$$
u(x) = \int_\Omega \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} f(y)\,\mathrm{d}y +
$$

$$
+ \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \right) u(y)\,\mathrm{d}s_y .
$$

Problém:

$$
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) = ? \ \text{na} \ \Gamma_1, \quad u(y) = ? \ \text{na} \ \Gamma_2.
$$

Zjistili jsme, že pro každé $\tilde{x} \in \Omega$ platí

$$u(\tilde{x}) = \int_\Omega \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\tilde{x} - y\|} f(y)\, \mathrm{d}y +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\tilde{x} - y\|} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\, \mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\tilde{x} - y\|} \right) u(y)\, \mathrm{d}s_y .$$

Odtud limitním přechodem ($\Omega \ni \tilde{x} \to x \in \partial\Omega$) dostaneme, že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí

$$u(x) = \int_\Omega \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - y\|} f(y)\, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - y\|} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\, \mathrm{d}s_y +$$

$$+ \frac{1}{2} u(x) - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - y\|} \right) u(y)\, \mathrm{d}s_y ,$$

to znamená, že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí

$$\frac{1}{2}u(x) = \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} f(y)\,\mathrm{d}y}_{=:N_0(f)(x)} +$$

$$+ \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\,\mathrm{d}s_y}_{=:V(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n})(x)} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|}\right) u(y)\,\mathrm{d}s_y}_{=:K(u)(x)} .$$

Zjistili jsme, že pro řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$ úlohy (DN) na $\partial\Omega$ platí

$$\boxed{\frac{1}{2}u = V(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}) - K(u) + N_0(f).}$$

Nyní se pokusíme vše zobecnit i pro slabá řešení. Klíčová otázka je, kde (v jakých prostorech) hledat zobecnění funkcí $u \in C^2(\overline{\Omega})$; $u_{|\partial\Omega}, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \in C(\partial\Omega)$.

Nejdříve si připomeňme si definici Sobolevova prostoru $H^1(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, a větu o stopách.

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ pro každé } i\} = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_1},$$

$$\|u\|_1 := \sqrt{\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x}.$$

Věta o stopách.

Existuje právě jedno spojité lineární zobrazení

$$T : \; H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

takové, že

$$\forall u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \; Tu = u_{|\partial\Omega}.$$

Dá se ukázat, že operátor stop $T: \ H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ `není na`.
Definujme prostor stop

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := T(H^1(\Omega)), \ \|g\|_{\frac{1}{2}} := \inf\left\{\|v\|_1 : \ v \in H^1(\Omega), \ Tv = g\right\}.$$

Dá se ukázat, že $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ je Hilbertův prostor.

Problémem zůstává, kde hledat (jak definovat) $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}$.
Inspirací může být zobecněná Greenova věta. Z ní plyne, že pro každé $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a $v \in H^1(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega -\Delta u v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} Tv \,\mathrm{d}s_x,$$

a proto taky

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} Tv \,\mathrm{d}s_x = \int_\Omega \Delta u v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x.$$

Věta o spojitém rozšíření.

Existuje spojité lineární zobrazeni

$$\varepsilon: \ H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$$

takové, že

$$\forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega): \ T\big(\varepsilon(g)\big) = g.$$

Definice.

Pro každou funkci

$$u \in H^1_\Delta := \{u \in H^1(\Omega): \ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

definujme zobrazení

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}: \ H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$$

předpisem

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(g) := \int_\Omega \Delta u \, \varepsilon(g) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u \nabla \varepsilon(g) \, \mathrm{d}x.$$

Dá se ukázat, že

- pro každé $u \in H^1_\Delta(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ je

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \in \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)^* =: H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega);$$

- pro každé $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ je

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(g) = \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} g \,\mathrm{d}s_x = \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, n_i\right) g \,\mathrm{d}s_x;$$

- pro každé $u \in H^2(\Omega)$ a $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ je

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(g) = \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^{3} T\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) n_i\right) g \,\mathrm{d}s_x;$$

- $\{(u_{|\partial\Omega}, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}) : \ u \in C^\infty(\overline{\Omega})\}$ je hustým podprostorem $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Věta o třech potenciálech.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí a $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Pak pro každé $x \in \Omega$ platí

$$u(x) = -\int_\Omega \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\Delta u(y)\,\mathrm{d}y +$$

$$+\int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\right)u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

Zobecněná věta o třech potenciálech.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí a $u \in H^1_\Delta(\Omega)$. Pak v Ω platí

$$u(x) = -\int_\Omega \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\Delta u(y)\,\mathrm{d}y +$$

$$+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\right) - \int_{\partial\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\right)T(u(y))\,\mathrm{d}s_y.$$

Připomeňme si: je-li $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $-\Delta u = f$ v Ω, platí pro každé $x \in \partial\Omega$

$$\frac{1}{2}u(x) = \underbrace{\int_\Omega \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}f(y)\,\mathrm{d}y}_{=:N_0(f)(x)} +$$

$$+\underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\,\mathrm{d}s_y}_{=:V(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n})(x)} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\Big(\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\Big)u(y)\,\mathrm{d}s_y}_{=:K(u)(x)},$$

tzn.

$$\frac{1}{2}u = V\Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\Big) - K(u) + N_0(f).$$

Odtud plyne (dá se ukázat, že existuje V^{-1})

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = V^{-1}\Big(\frac{1}{2}I + K\Big)(u) - V^{-1}(N_0(f)).}$$

Situaci lze zobecnit: je-li $u \in H^1_\Delta(\Omega)$, $-\Delta u = f$ a $Tu = g$, platí

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = \underbrace{V^{-1}\big(\tfrac{1}{2}I + K\big)(g)}_{=:Sg} - \underbrace{V^{-1}\big(N_0(f)\big)}_{=:Nf}\,.}$$

- $S: \ H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ... Steklovův - Poincarého operátor,
- $N: \ L^2(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ... Newtonův potenciál.

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u = f \text{ v } \Omega \\ u = g \text{ na } \partial\Omega \end{cases}} \dashrightarrow u = u_1 + u_2 \dashrightarrow \boxed{\begin{cases} -\Delta u_1 = 0 \\ u_1 = g \end{cases}}, \ \boxed{\begin{cases} -\Delta u_2 = f \\ u_2 = 0 \end{cases}}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}n}}_{=Sg} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}n}}_{=-Nf}\,.$$

$$\text{(DN)} \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = h & \text{na } \Gamma_2, \end{cases}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 má „kladnou míru“, $h \in L^2(\Gamma_2)$, $f \in L^2\Omega)$.

Slabým řešením úlohy (DN) rozumíme funkci

$$u \in \mathcal{W} := \{v \in H^1(\Omega) : \; Tv = 0 \text{ na } \Gamma_1\}$$

takovou, že

$$\forall v \in \mathcal{W} : \quad \int_\Omega \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} hTv \, \mathrm{d}s.$$

Slabým *hraničním* řešením úlohy (DN) rozumíme funkci

$$u \in W := \{v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \; v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}$$

takovou, že

$$\forall v \in W : \quad \langle Su, v \rangle = \langle Nf, v \rangle + \int_{\Gamma_2} hv \, \mathrm{d}s.$$

$$
\text{(SP)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_u, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = 0 & \text{na } \Gamma_f, \\ u - g \geq 0 & \text{na } \Gamma_c, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \geq 0 & \text{na } \Gamma_c, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(u-g) = 0 & \text{na } \Gamma_c, \end{cases}
$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c$, $f \in L^2(\Omega)$ a $g \in L^2(\Gamma_c)$.

Slabým řešením úlohy (SP) rozumíme funkci

$$u \in \mathcal{K} := \{v \in H^1(\Omega) : \; Tv = 0 \text{ na } \Gamma_u, \; Tv - g \geq 0 \text{ na } \Gamma_c\}$$

takovou, že

$$\forall v \in \mathcal{K} : \quad \int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) \,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega f(v-u)\,\mathrm{d}x.$$

$$
\text{(SP)} \qquad \left\{ \begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{v} \;\; \Omega, \\ u &= 0 \;\; \text{na} \;\; \Gamma_u, \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} &= 0 \;\; \text{na} \;\; \Gamma_f, \\ u - g &\geq 0 \;\; \text{na} \;\; \Gamma_c, \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} &\geq 0 \;\; \text{na} \;\; \Gamma_c, \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(u-g) &= 0 \;\; \text{na} \;\; \Gamma_c, \end{aligned} \right.
$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c$, $f \in L^2(\Omega)$ a $g \in L^2(\Gamma_c)$.

Slabým *hraničním* řešením úlohy (SP) rozumíme funkci

$$
u \in K := \{v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \; v = 0 \text{ on } \Gamma_u, \; v - g \geq 0 \text{ on } \Gamma_c\}
$$

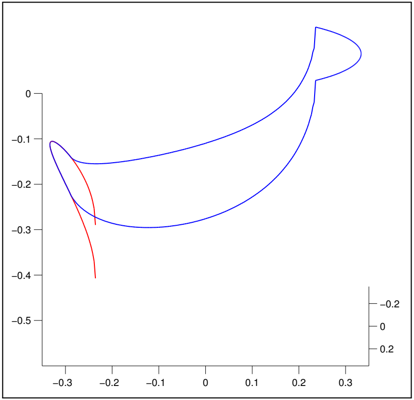
takovou, že

$$
\forall v \in K : \quad \langle Su, v - u \rangle \geq \langle Nf, v - u \rangle.
$$

$$(SP) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{v} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{na} \quad \Gamma_u, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = 0 & \text{na} \quad \Gamma_f, \\ u - g \geq 0 & \text{na} \quad \Gamma_c, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \geq 0 & \text{na} \quad \Gamma_c, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(u-g) = 0 & \text{na} \quad \Gamma_c, \end{cases}$$

kde

- $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < \frac{1}{9}\}$,
- $\Gamma_u := \{(x,y) \in \partial\Omega : \; |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{6}, \; y > 0\}$,
- $\Gamma_c := \{(x,y) \in \partial\Omega : \; |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{6}, \; y < 0\}$,
- $\Gamma_f := \partial\Omega \setminus \{\Gamma_u \cup \Gamma_c\}$,
- $f(x) := -3$,
- $g(x,y) := \sqrt{\frac{1}{18} - x^2} - \frac{\sqrt{2}}{6} - 0.2.$



O. John, J. Nečas
Rovnice matematické fyziky
MFF UK, Praha, 1981

W. McLean
Strongly elliptic systems and boundary integral equations
Cambridge University Press, 2000

O. Steinbach
Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems (Finite and boundary elements)
Springer, 2003

J. Bouchala, Z. Dostál, M. Sadowská
Theoretically supported scalable BETI method for variational inequalities
Computing 82, 2008, 53-75

J. Bouchala
Úvod do Boundary Elements Method
www.am.vsb.cz/bouchala